



ce
pre
UNI

Aritmética

NUMERACIÓN

CICLO
PREUNIVERSITARIO

PRE 2024 -1



ANTECEDENTE HISTÓRICO DE LA NUMERACIÓN

NUMERACIÓN BABILÓNICA

Este sistema apareció por primera vez alrededor de 1800-1900 aC. También se acredita **como el primer sistema de numeración posicional**, es decir, en el cual el valor de un dígito particular depende tanto de su valor como de su posición en el número que se quiere representar.

La teoría más comúnmente aceptada es que el 60, un número compuesto de muchos factores fue elegido como base debido a su factorización $2 \times 2 \times 3 \times 5$, que lo hace divisible por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30. De hecho, es el entero más pequeño divisible por todos los enteros del 1 al 6.

𐎶 1	𐎶𐎶 11	𐎶𐎶𐎶 21	𐎶𐎶𐎶𐎶 31	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 41	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 51
𐎶𐎶 2	𐎶𐎶𐎶 12	𐎶𐎶𐎶𐎶 22	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 32	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 42	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 52
𐎶𐎶𐎶 3	𐎶𐎶𐎶𐎶 13	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 23	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 33	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 43	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 53
𐎶𐎶𐎶𐎶 4	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 14	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 24	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 54
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 5	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 15	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 25	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 35	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 45	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 55
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 6	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 16	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 26	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 46	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 56
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 17	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 27	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 47	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 57
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 8	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 18	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 28	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 58
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 19	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 29	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 59
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 10	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 20	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 30	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 40	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 50	

Símbolos usados en la numeración babilónica

NUMERACIÓN

Es la parte de la aritmética que se encarga del estudio de la correcta formación, representación, escritura y lectura de los números.

CIFRAS: Son los símbolos que se utilizan para representar a los números.

0; 1; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; ...

Ejemplo: 83; $\overline{ab}$ → Números de 2 cifras

583; $\overline{abc}$ → Números de 3 cifras

4204; $\overline{abcd}$ → Números de 4 cifras

$\overline{a(2a)3a(4a)a}$ → Números de 6 cifras

Número capicúa:

Es aquel número en el cual las cifras equidistantes de los extremos son iguales.

Ejemplo: 66; $\overline{pp}$ → Capicúas de 2 cifras

3883; $\overline{mnnm}$ → Capicúas de 4 cifras

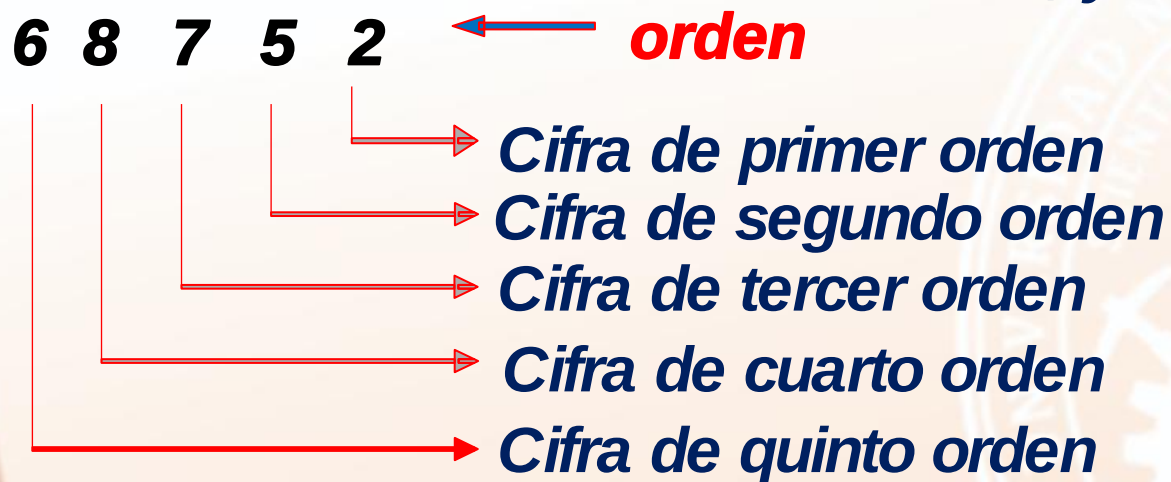
SISTEMA DE NUMERACIÓN

Es un conjunto de principios, normas y convenios que nos permiten la correcta formación, lectura y escritura de los números.

PRINCIPIOS:

Orden de una cifra

Nos indica la posición que ocupa una cifra dentro de un número, y esta se lee de derecha a izquierda.



6 : **Cifra de primer lugar**
 8 : **Cifra de segundo lugar**
 7 : **Cifra de tercer lugar**
 5 : **Cifra de cuarto lugar**
 2 : **Cifra de quinto lugar**

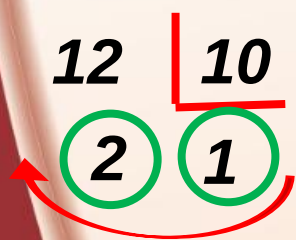
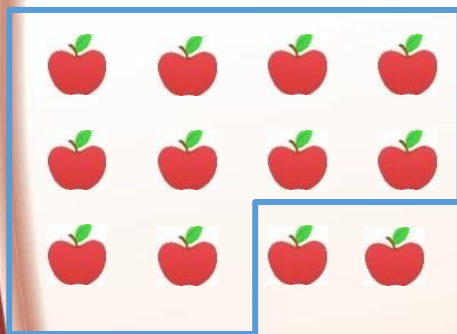
orden
lugar

Base de un sistema de numeración

La base de un sistema de numeración, es un número entero positivo mayor que la unidad, que indica el número de unidades de un orden cualquiera necesario para formar una unidad del orden inmediato superior.

Ejemplo: Suponiendo que se tiene 12 manzanas, y deseamos expresar dicha cantidad en distintas bases:

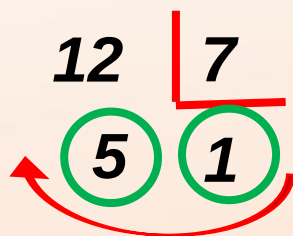
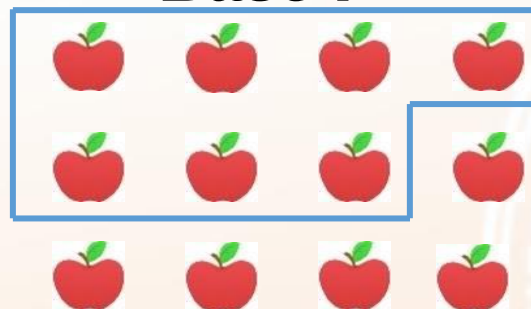
Base 10



12

=

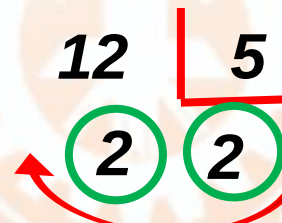
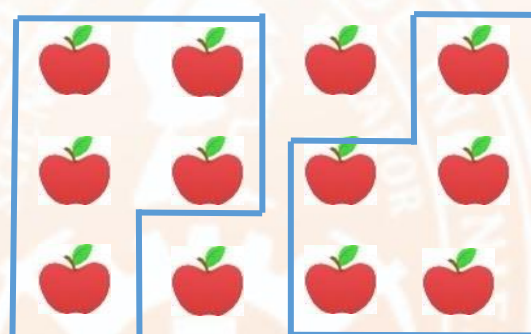
Base 7



$15_{(7)}$

=

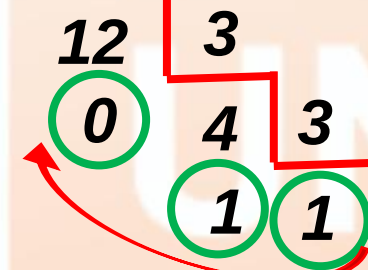
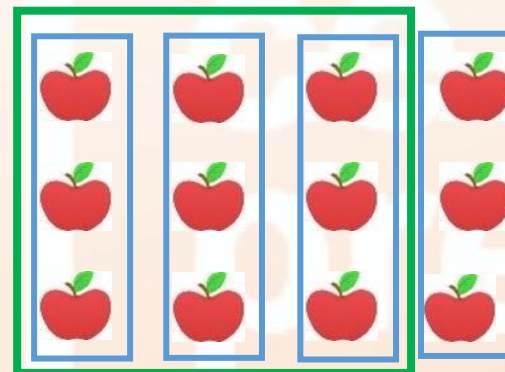
Base 5



$22_{(5)}$

=

Base 3



$110_{(3)}$

De lo anterior :

$$12 = 15_{(7)} = \overset{-}{2}\overset{+}{2}_{(5)} = \overset{+}{1}\overset{-}{1}\overset{-}{0}_{(3)}$$



*A mayor número aparente
le corresponde menor
base*

En resumen

Dado el número $\overline{abc}_{(n)}$ tenemos que

- $a, b, c \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge a \neq 0$
- $a, b, c < n$, *(toda cifra es menor que la base)*
- $n \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 2$



ALGUNOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Base	Nombre del sistema	Cifras a usar
2	Binario	0; 1
3	Ternario	0; 1; 2
4	Cuaternario	0; 1; 2; 3
5	Quinario	0; 1; 2; 3; 4
6	Senario	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	Heptanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	Octanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
9	Nonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
10	Decimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
11	Undecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A
12	Duodecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A; B
⋮	⋮	⋮

OBS

A <> 10

B <> 11

C <> 12

APLICACIÓN 01

Dada la siguiente igualdad $\overline{mnp}_7 = 3231_m = 1422_n = 1033_p$, calcule el valor de $m + n + p$.

Resolución

De la igualdad $3231_m = 1422_n = 1033_p = \overline{mnp}_7$

entonces $3 < m < n < p < 7$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
4 5 6

Por lo tanto $m + n + p = 15$

Valor de una cifra

En la representación de un número las cifras poseen dos valores.

Valor absoluto (VA) : Es el valor que tiene una cifra de acuerdo a su forma.

Valor relativo (VR): Es el valor que tiene una cifra de acuerdo al orden que ocupa en el número.

Ejemplos:

 $10^3 \ 10^2 \ 10^1 \ 1$
2 7 4 5

	ORDEN	VA	VR
	1°	5	5
	2°	4	40
	3°	7	700
	4°	2	2000

 $8^3 \ 8^2 \ 8^1 \ 1$
1 4 6 3 (8)

	ORDEN	VA	VR
	1°	3	3
	2°	6	60 ₈
	3°	4	400 ₈
	4°	1	1000 ₈

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Es la suma de los valores relativos de cada cifra de un número.

$$\overline{abc \dots pq}_n = a \times n^{k-1} + b \times n^{k-2} + \dots + p \times n + q$$

k cifras

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{➤ } 4652 &= 4000 + 600 + 50 + 2 \\ 4652 &= 4 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 5 \times 10 + 2 \end{aligned}$$

Descomposición polinómica

$$\text{➤ } 21564_7 = 2 \times 7^4 + 1 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 6 \times 7 + 4$$

$$\text{➤ } \overline{ababab}_{(n)} = \overline{ab}_{(n)} \times n^4 + \overline{ab}_{(n)} \times n^2 + \overline{ab}_{(n)}$$

(Descomposición por bloques)

CAMBIOS DE BASE

De base *diferente de 10* a base **10**

Por descomposición polinómica

$$324_{(8)} = 3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 4$$

⇒ $324_{(8)} = \mathbf{212}$

$$2143_{(6)} = 2 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 4 \times 6 + 3$$

⇒ $2143_{(6)} = \mathbf{495}$

Por el método de Ruffini

Expresar el número 324_8 en base 10

8	×	3	2	4
8	×	24	208	
3	3	26	212	

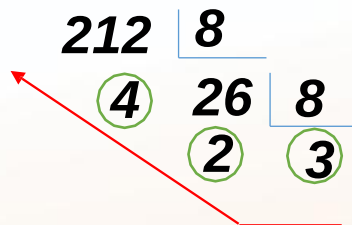
Expresa el número 2143_6 en base 10

6	×	2	1	4	3
6	×	12	78	492	
2	2	13	82	495	

De base **10** a base **diferente de 10**

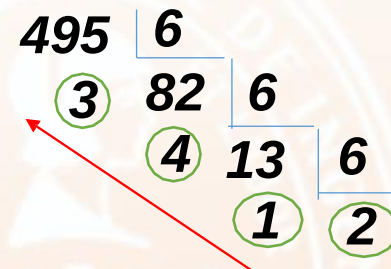
Método de divisiones sucesivas

Expresa el número 212 en base 8



➡ $212 = 324_{(8)}$

Expresa el número 495 en base 6



➡ $495 = 2143_{(6)}$

APLICACIÓN 02

Si $\overline{a2a2}_{(7)} = \overline{1bc0}$, calcule el máximo valor de $(a + b + c)$.

Resolución

$$\overline{a2a2}_{(7)} = \overline{1bc0}; \quad 1 \leq a \leq 6$$

$$\rightarrow a \times 7^3 + 2 \times 7^2 + a \times 7 + 2 = \overline{1bc0}$$

$$350 \times a + 100 = \overline{1bc0}$$

$$35 \times a + 10 = \underbrace{\overline{1bc}}$$



3

115

4

150

5

185

Por lo tanto

$$(a + b + c)_{\text{máx}} = 5 + 8 + 5 = 18$$

APLICACIÓN 03

Se desea pesar 631 g de arroz, utilizando una balanza de dos platillos y colocando pesas de 1g, 8g, 64g, 512g, . . . solo en uno de los platillos. Si hay como máximo 7 pesas de cada tipo, ¿cuántas pesas son necesarias?

Resolución

631



Pesas: 1g 8g 8^2g 8^3g ...
n.º de pesas: a b c d ...

donde $0 \leq a, b, c, d \dots \leq 7$

$$\rightarrow 631 = a \cdot 1 + b \cdot 8 + c \cdot 8^2 + d \cdot 8^3 + \dots$$

$$631 = \overline{\dots dcba}_8$$

$$631 = 1167_8$$

∴

Cantidad de pesas = 15

APLICACIÓN 04

De la igualdad $\overline{abab}_{(5)} = \overline{mmm}_{(9)}$, calcule el mínimo valor de $(a + b + m)$.

Resolución

$$\overline{abab}_{(5)} = \overline{mmm}_{(9)}$$

$$\overline{ab}_5 \times 5^2 + \overline{ab}_5 = m \times 9^2 + m \times 9 + m$$

$$\overline{ab}_5 \times 26 = m \times 91$$

$$\underbrace{\overline{ab}_5}_{7} \times 26 = m \times \underbrace{13}_{2} \times 7$$

$$\rightarrow \overline{ab}_5 = 7 = 12_5$$

Por lo tanto

$$(a + b + m)_{\text{mín}} = 1 + 2 + 2 = 5$$

NÚMERO DE CIFRAS MÁXIMAS

Ejemplos:

$$* 22_{(3)} = 8 = 3^2 - 1$$

$$* 222_{(3)} = 26 = 3^3 - 1$$

$$* 2222_{(3)} = 80 = 3^4 - 1$$

Cantidad
de cifras
base

En general:

$$\underbrace{(n-1)(n-1) \dots (n-1)}_{k \text{ cifras}}_{(n)} = n^k - 1$$

$$* 5555555_{(6)} = 6^7 - 1$$

APLICACIÓN 05

Si $\overline{(a-1)(a-1)(a-1)(a-1)}_{(a)} = \overline{4bcd}$,
Calcule el valor de $a + b + c + d$.

Resolución

$$\overline{(a-1)(a-1)(a-1)(a-1)}_{(a)} = \overline{4bcd}$$

Se deduce que: $a^4 - 1 = \overline{4bcd}$

$$a = 8 \Rightarrow 8^4 - 1 = 4095$$

Entonces: $b = 0 \quad c = 9 \quad d = 5$

$$\therefore a + b + c + d = 22$$

OBSERVACIÓN

¿A qué intervalo pertenecen los números de cuatro cifras del sistema senario?

$$1000_{(6)}; 1001_{(6)}; \dots; 5555_{(6)}$$

$$1000_{(6)} \leq \overline{abcd}_{(6)} \leq 5555_{(6)}$$

$$6^3 \leq \overline{abcd}_{(6)} < 6^4$$

Los números del sistema senario están en el intervalo: $[6^3; 6^4 >$

En general:

$$n^{k-1} \leq \underbrace{\overline{abc \dots de}_{(n)}}_{k \text{ cifras}} < n^k$$

k cifras

APLICACIÓN 06

¿Cuántos números naturales existen tales que en los sistemas senario y quinario tienen tres y cuatro cifras respectivamente?

Resolución Sea: $N = \overline{abc}_{(6)} = \overline{xyzw}_{(5)}$

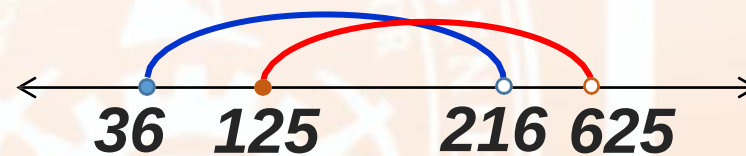
Analizamos el intervalo de cada número

$$6^2 \leq \overline{abc}_{(6)} < 6^3$$

$$5^3 \leq \overline{xyzw}_{(5)} < 5^4$$

$$36 \leq \overline{abc}_{(6)} < 216$$

$$125 \leq \overline{xyzw}_{(5)} < 625$$



125; 126; 127; ... ; 215

91 números

∴

Existen 91 números

CASOS ESPECIALES DE CAMBIO DE BASE

Primer caso: de base n a base n^k ; $K \in \mathbb{Z}^+$

- ❑ Se forman grupos de K cifras; a partir del orden uno.
- ❑ Cada grupo así formado se descompone polinómicamente, dicho resultado es la cifra en la nueva base (n^k).

Ejemplo:

Expresa $10011101111_{(2)}$ en el sistema octinario.

Resolución

Como $8 = 2^3$, cada grupo debe tener tres cifras para obtener las cifras respectivas en base 8, cada bloque se descompone polinómicamente en base 2 y el resultado será la cifra en base 8.

$$\begin{aligned}
 & 10 \mid 011 \mid 101 \mid 111_{(2)} \\
 = & (10_{(2)})(011_{(2)})(101_{(2)})(111_{(2)})_{(8)} \\
 \therefore & 10011101111_{(2)} = 2357_{(8)}
 \end{aligned}$$

APLICACIÓN 07

Si el número 10210021121022_n se expresa en la base n^3 , la suma de sus cifras aumenta en 69 unidades, calcule el valor de n .

Resolución

Como el número de base n se expresará en la base n^3 , formaremos grupos de 3 cifras de izquierda a derecha.

$$\begin{aligned}
 10 \mid 210 \mid 021 \mid 121 \mid 022_{(n)} &= \overline{(10_n)(210_n)(021_n)(121_n)(022_n)_{n^3}} \\
 &= \overline{n(2n^2 + n)(2n + 1)(n^2 + 2n + 1)(2n + 2)_{n^3}}
 \end{aligned}$$

Suma de cifras $\rightarrow 15$

Suma de cifras $\rightarrow 3n^2 + 8n + 4$

Por dato $3n^2 + 8n + 4 = 15 + 69 \therefore \boxed{n = 4}$

Segundo caso: de base n^k a base n ; $k \in \mathbb{Z}^+$

- Cada cifra del número de la base n^k genera un grupo de k cifras en base n .
- Las cifras de cada grupo se obtienen por divisiones sucesivas entre n .

OBSERVACIÓN:

Si las divisiones no generan k cifras, se completará con **ceros** a la izquierda.

Ejemplo:

Expresa $5207_{(9)}$ en el sistema ternario.

Resolución

$9 = 3^2$ (cada cifra de la **base 9** origina **2** cifras en base 3)

$$\therefore 5207_{(9)} = 12\mathbf{0}2\mathbf{0}021_{(3)}$$

APLICACIÓN 08

Exprese el número 4653_n en el sistema de base $n + 1$. Indique como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución

Dividimos sucesivamente entre $n + 1$, aplicando la regla de Ruffini:

$$n + 1 = 0 \rightarrow n = -1$$

Luego: $4653_n = 4(-6)50_{(n+1)} = \overline{3(n - 5)50}_{(n+1)}$

	4	6	5	3
-1		-4	-2	-3
	4	2	3	0
-1		-4	2	
	4	-2	5	
-1		-4		
	4	-6		

∴

La suma de sus cifras es $n + 3$.

PROPIEDAD

CASO GENERAL:

$$\overline{1a_1b_1c_1 \dots 1k_{(n)}} = n + a + b + c + \dots + k$$

CASO PARTICULAR:

$$\overline{1a_1a_1a_1 \dots 1a_{(n)}} = n + k \cdot a$$

k veces

APLICACIÓN 09

Calcule $a + n$, si $\overline{aaa}$

$$= \overline{1(n-1) \overline{1(n-2) \dots 131211n}}$$

Resolución:

$$111 \times a = n + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)]$$

$$111 \times a = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 \times 3 \times 37 \times a = n(n+1)$$

$$\rightarrow a = 6 ; n = 36$$

$$\therefore a + n = 42$$

PARIDAD DE UN NÚMERO

Para averiguar si un número es par o impar, el análisis se debe realizar en el sistema decimal y no en otro sistema de numeración, la descomposición polinómica permite analizar la paridad (par, impar) de los números escritos en base par o impar .

En principio destaquemos lo siguiente:

- *Toda potencia de un par es un número par.*
- *Toda potencia de un impar es un número impar.*

Sea el número: $N = \overline{abcde}_{(n)}$

Para $n = \text{par}$:

Si $e = \text{par} \Rightarrow N = \text{par}$

Si $e = \text{impar} \Rightarrow N = \text{impar}$

Para $n = \text{impar}$:

Si $(a + b + c + d + e) = \text{par} \Rightarrow N = \text{par}$

Si $(a + b + c + d + e) = \text{impar} \Rightarrow N = \text{impar}$

APLICACIÓN 10

Indique los correspondientes valores de verdad de las siguientes proposiciones

I. El número $1575_9 \times 53_6$ es par.

II. El número $\overline{aabb4}_7$ es par.

III. Todo número natural, que termina en cifra par, es par.

A) VVV B) FFV C) FVF D) VFV E) FFF

Resolución

I) Como $1575_{(9)}$ es par, entonces $1575_9 \times 53_6$ es par (V)

II) $\overline{aabb4}_{(7)}$ es par, ya que su base es impar y la suma de sus cifras es par. (V)

III) Todo número natural que termina en cifra par, no siempre es par, por ejemplo 52_9 . (F)

DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS COMPRENDIDOS ENTRE CERO Y UNO

$$0,\overline{abcd}_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \frac{d}{n^4}$$

Ejemplos:

$$0,241_{(9)} = \frac{2}{9} + \frac{4}{9^2} + \frac{1}{9^3}$$

$$0,121212 \dots_{(7)} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + \dots$$

CAMBIO DE BASE PARA NÚMEROS COMPRENDIDOS ENTRE CERO Y UNO

Para el cambio de base debemos tener en cuenta :

$$0,\overline{abcd}_{(n)} = \frac{\overline{abcd}_{(n)}}{10000_{(n)}}$$

$$0,\widehat{abcd}_{(n)} = \frac{\overline{abcd}_{(n)}}{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)(n-1)}_{(n)}}$$

$$0,\overline{abc} \widehat{def}_{(n)} = \frac{\overline{abcdef}_{(n)} - \overline{abc}_{(n)}}{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)000}_{(n)}}$$

APLICACIÓN 11

Escriba $0,24_{(8)}$ en base 6

PROCEDIMIENTO:

Convertir la fracción dada a fracción ordinaria decimal

$$0,24_{(8)} = \frac{24_{(8)}}{100_{(8)}} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{5}{16} = 0,3125$$

0	3	1	2	5	× 6
1	8	7	5		× 6
5	2	5			× 6
1	5				× 6
3	0				

$$\therefore 0,24_{(8)} = \boxed{0,1513_{(6)}}$$

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Es una sucesión de números en la cual la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera resulta el mismo valor numérico, llamado **razón**.

En general

Dada la progresión aritmética:

$$a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; \dots ; a_n$$

$\underbrace{\quad\quad}_{+r} \quad \underbrace{\quad\quad}_{+r} \quad \underbrace{\quad\quad}_{+r}$

Donde

a_1 : **Primer término**

a_n : **Término n -ésimo**

r : **razón**

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

Término n -ésimo

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

El número de términos

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

La suma de los n primeros términos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n$$

APLICACION 12

Dada la siguiente progresión aritmética $78; \overline{ab}; \overline{ac}; \dots; \overline{abc}$.
Si $a + b + c = 19$, calcule la suma de términos.

Resolución

$$78; \overline{ab}; \overline{ac}; \dots; \overline{abc} \dots (*)$$

Deducimos que $a = 8$

dato $a + b + c = 19$

$$\rightarrow b + c = 11 \dots (1)$$

además

$$\text{razón} = \overline{ab} - 78 = \overline{ac} - \overline{ab}$$

$$8b - 78 = 8c - 8b$$

$$c = 2 + 2b \dots (2)$$

De (1) y (2):

$$b = 3 ; c = 8$$

Luego, reemplazando en (*)

$$78; 83; 88; \dots; 838$$

$$\frac{838-78}{5} + 1 = 153 \text{ términos}$$

La suma de sus términos es

$$\left(\frac{78 + 838}{2} \right) \times 153 = 70\,074$$

∴

70 074

CONTEO DE NÚMEROS

Es un procedimiento que sirve para averiguar la cantidad de números con características comunes, utilizando los principios de la adición y multiplicación.

Por análisis combinatorio

¿Cuántos números de 3 cifras existen?

Sea:

$$N = \overline{a \ b \ c}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$$9 \times 10 \times 10 = 900$$

¿Cuántos números de 3 cifras diferentes existen?

$$N = \overline{a \ b \ c}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$$9 \times 9 \times 8 = 648$$

APLICACIÓN 13

Determine la cantidad de números que existen de la siguiente forma

$$(8 - a)b(b + 2) \left(\frac{12}{c} \right) c_{(14)}$$

Resolución

$$\overbrace{(8 - a)}^{\text{13}} \underbrace{b}_{\text{12}} \underbrace{(b + 2)}_{\text{12}} \underbrace{\left(\frac{12}{c} \right) c}_{\text{6}}_{(14)}$$

1

0

1

2

1

2

3

2

3

⋮

⋮

4

13

11

6

12

13

×

12

×

6

=

936 números

CONTEO DE NÚMEROS Y DE CIFRAS

¿Cuántas cifras se utilizaron en la numeración de un libro de 142 páginas?

Resolución

1 ; 2 ; 3 ; ... ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; ... ; 99 ; 100 ; 101 ; 102 ; ... ; 142

9 pág

90 pág

43 pág

$$n.^{\circ} \text{ de cifras} = 1 \times 9 + 2 \times 90 + 3 \times 43$$

$$n.^{\circ} \text{ de cifras} = 318$$

OBSERVACIÓN:

$n.^{\circ} \text{ de cifras usadas} \Leftrightarrow n.^{\circ} \text{ de tipos de imprenta} \Leftrightarrow n.^{\circ} \text{ de caracteres}$

En general :

Dada la secuencia:

1; 2; 3; 4; 5; 6; ... ; N
k cifras

$$\# \text{ de cifras usadas} = (N + 1) \times k - \underbrace{111 \dots 111}_{k \text{ cifras}}$$

Del ejemplo anterior

1; 2; 3; 4; 5; 6; ... ; 142
3 cifras

$$\text{n.º de cifras usadas} = (142 + 1) \times 3 - 111$$

$$\text{n.º de cifras usadas} = 318$$

Válido para otras bases diferentes de 10

1; 2; 3; ... ; N_n (**N** tiene **k** cifras)

$$\text{n.º cifras} = [N_{(n)} + 1](k) - \underbrace{11 \dots 11}_{k \text{ cifras}}_{(n)}$$

Ejemplo

¿Cuántas cifras se han utilizado al escribir en base 7, la sucesión natural hasta el número $164_{(7)}$?

$$\begin{aligned} \text{n.º de cifras} &= [164_{(7)} + 1](3) - 111_{(7)} \\ &= [95 + 1] \times 3 - 57 \\ &= 231 \end{aligned}$$



Se han utilizado 231 cifras

APLICACIÓN 14

La diferencia de la cantidad de cifras que se utilizan para numerar las páginas de un libro en base cuatro y en base ocho es 1341_5 . Si en el sistema cuaternario, la última página del libro tiene 4 cifras, determine el número de páginas del libro.

Resolución

Sea la última página del libro en el sistema decimal

$$N = \overline{abcd}_4$$

Como $4^3 \leq \overline{abcd}_4 < 4^4$
 $8^2 \leq \overline{abcd}_4 < 8^3$

$$N = \overline{abcd}_4 = \overline{mnp}_8$$

luego

$n.^\circ$ cifras utilizadas en base 4:

$$(N + 1)4 - 1111_4 = 4N - 81$$

$n.^\circ$ cifras utilizadas en base 8:

$$(N + 1)3 - 111_8 = 3N - 70$$

dato $4N - 81 - [3N - 70] = 1341_5 = 221$

$\therefore N = 232$



ce
pre
UNI

Aritmética

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



ce
pre
UNI

Problema 01

Indique los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. El número 210_7 es menor que el número 107_8 .
- II. El número $\overline{3mn0mn7}_{11}$ es par.
- III. Todo número natural en el sistema senario que termina en cifra impar es impar.

A) VVV B) FFV C) FVV D) VFV E) FFF

Resolución

- I. $210_7 = 105 \wedge 107_8 = 71$ **F**
- II. $2m + 2n + 10$ es par **V**
- III. senario: base 6 **V**

Rpta. C

Problema 02

Escriba el número 14645_{2023} en el sistema de numeración de base 2024. Dé como respuesta la cifra de menor orden.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

$$N = 1 \cdot n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 + 4$$

$$N = (n + 1)^4 + 4$$

$$N = 1 \cdot (n + 1)^4 + 4$$

$$N = \overline{10004}_{(n+1)}$$

Rpta. D

Problema 03

Indique los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si $\overline{abcd}_{n^4} = \overline{pq}_{n^4}$; entonces se cumple $n^3 \leq q < n^4$.
 - II. La cantidad de cifras que se utilizan en el sistema de numeración de base n , es n .
 - III. En cualquier sistema de numeración, la base es mayor o igual a las cifras.
- A) VVV B) VVF C) VFV D) FVF E) FFF

Resolución

$$I. \overline{abcd}_n = q_{n^4}$$

$$n^3 \leq \overline{abcd}_n < n^4$$

$$n^3 \leq q < n^4$$

V

II. **V**

III. **F**

Rpta. B

Problema 04

Si $45_b + \overline{3c}_a + \overline{1b}_c - 2 = \overline{7a}_9$, determine el valor de $a + b + c$.

A) 16

B) 19

C) 21

D) 22

E) 23

Resolución

$$5 < \underset{6}{b} < \underset{7}{c} < \underset{8}{a} < 9$$

$$a + b + c = 21$$

Rpta. C

Problema 05

De un número de dos cifras se sabe que el número de unidades excede en dos al número de decenas y que el producto del número por la suma de las cifras es 144. Determine el producto de dichas cifras.

A) 3

B) 8

C) 24

D) 35

E) 48

Resolución

Sea $\overline{ab}$ dicho número

Dato 1: $b - a = 2$

Dato 2: $(\overline{ab})(a + b) = 144$

$$(\overline{ab})(a + b) = 24 \cdot 2 \cdot 4 \Rightarrow \overline{ab} = 24$$

$$\therefore a \cdot b = 8$$

Problema 06

¿Cuántos números capicúas de tres cifras cuya suma de cifras es impar existen tales que en base cinco se escribe con 4 cifras?

A) 20

B) 23

C) 24

D) 25

E) 27

Resolución

Dato: $\overline{xyx} = \overline{abcd}_5 \Rightarrow 5^3 \leq \overline{abcd}_5 < 5^4 \Rightarrow 125 \leq \overline{abcd}_5 < 625$

Es evidente que la suma de las cifras de dicho capicúa será impar, sólo cuando la cifra central sea impar

$\overline{x \ y \ x}$

Si $x = 1: \rightarrow y = 3, 5, 7, 9 \rightarrow 4$ números

Si $x = 2: \rightarrow y = 1, 3, 5, 7, 9 \rightarrow 5$ números

Si $x = 3: \rightarrow y = 1, 3, 5, 7, 9 \rightarrow 5$ números

Si $x = 4: \rightarrow y = 1, 3, 5, 7, 9 \rightarrow 5$ números

Si $x = 5: \rightarrow y = 1, 3, 5, 7, 9 \rightarrow 5$ números

Si $x = 6: \rightarrow y = 1 \rightarrow 1$ número

∴ Existen **25** números capicúas que cumplen dicha condición

Problema 07

El producto de dos números impares consecutivos se expresa como el menor número del sistema de base 4 cuya suma de cifras es 24. Calcule la suma de cifras del menor de los números impares.

A) 18

B) 15

C) 14

D) 13

E) 12

Resolución

Sea N y $(N + 2)$ los impares consecutivos

Dato: $(N)(N + 2) = 33333333_5$

$$(N)(N + 2) = 5^8 - 1 = 65535$$

$$(N)(N + 2) = 255 \cdot 257$$

$$\therefore \sum \text{cifras}(N) = 12$$

Problema 08

En un cierto mercado para determinar el peso de un producto se usó una balanza de dos platillos para pesar 251 gramos y se disponen de dos pesas de 1g, dos de 3g, dos de 9g, dos de 27g, dos de 81g, dos de 243 g. Determine el número de pesas necesarias.

A) 3

B) 4

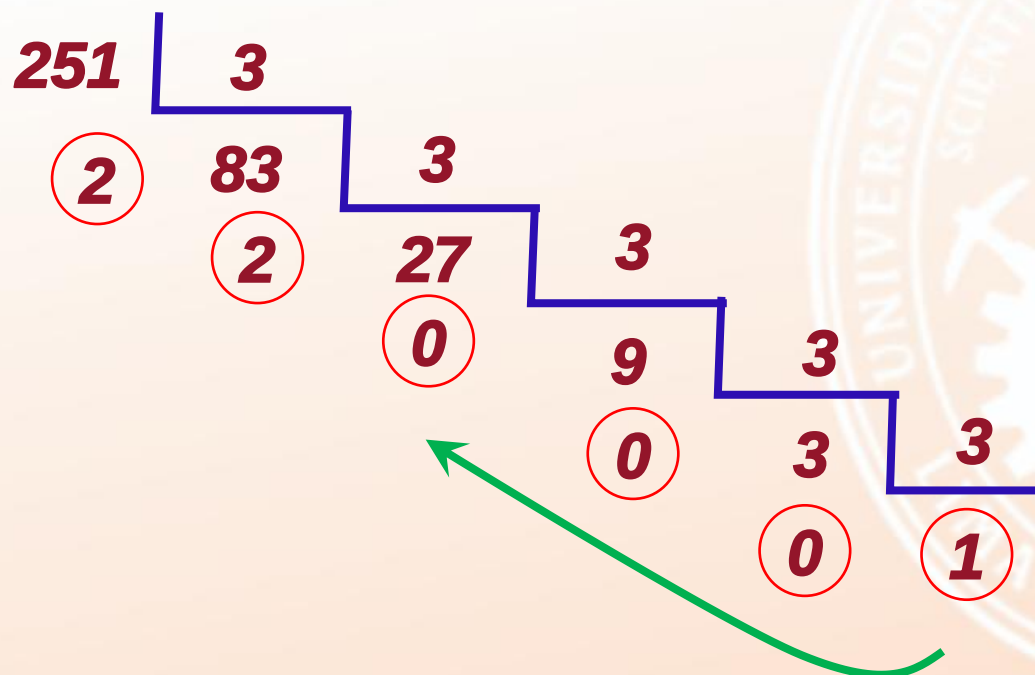
C) 5

D) 6

E) 7

Resolución

Pasando 251 al sistema ternario:



$$251 = 100022_3$$

∴ Se utilizó 5 pesas

Problema 09

Calcule la suma de cifras del resultado de convertir la siguiente expresión

$7 \times 2^{16} - 6 \times 2^{12} - 5 \times 2^8 - 4 \times 2^4 - 3$ en el sistema de base 8.

A) 25

B) 26

C) 27

D) 28

E) 29

Resolución

$$N = 7 \times 2 \times (2^3)^5 - 6 \times (2^3)^4 - 5 \times 2^2 \times (2^3)^2 - 4 \times 2 \times 2^3 - 3$$

$$N = 2^3 \times (2^3)^5 + 6 \times (2^3)^5 - 6 \times (8)^4 - 21 \times (8)^2 - 3$$

$$N = 1 \times (8)^6 + 6 \times (8)^5 - 6 \times 8^4 - 21 \times 8^2 - 3$$

$$N = 16(-6)0(-21)0(-3)_8$$

$$N = 1 \ 5 \ 1 \ 5 \ 2 \ 7 \ 5_8$$

Suma de cifras = **26**

Problema 10

Al expresar el menor número del sistema octanario, cuya suma de cifras es 280, al sistema cuaternario, se obtuvo como suma de cifras M ; pero en el sistema hexadecimal, se obtuvo como suma de cifras N . Calcule $M+N$.

A) 460

B) 480

C) 520

D) 580

E) 630

Resolución

$$N = \underbrace{777 \dots 777}_{40 \text{ cifras}}_{(8)}$$

$$N = \underbrace{333 \dots 333}_{60 \text{ cifras}}_{(4)}$$

Suma de cifras 180

$$N = 8^{40} - 1 = (2^2)^{20 \times 3} - 1 = 4^{60} - 1$$

$$N = 16^{30} - 1$$

$$N = \underbrace{(15)(15)(15) \dots (15)(15)(15)}_{30 \text{ cifras}}_{(16)}$$

Suma de cifras 450

Suma pedida: $180 + 450 = 630$

Problema 11

Si se cumple que $321321_n = \overline{(n^3 - 39)(n^3 - 39)}_{n^3}$ entonces determine la cantidad de números de 3 cifras diferentes que se pueden escribir en la base $(n+3)$.

A) 252

B) 294

C) 343

D) 512

E) 520

Resolución

$$3n^2 + 2n + 1 = n^3 - 39$$

$$n^3 - 3n^2 - 2n = 40$$

$$n = 5$$

$$n + 3 = 8$$

a	b	c	(8)
↓	↓	↓	
1	0	0	
2	1	1	
3	2	2	
4	3	3	
5	4	4	
6	5	5	
7	6	6	
7	7	7	
$7 \times 7 \times 6 = 294$			

Problema 12

En la siguiente igualdad:

$$\overline{(a+1)(a+2)(a+3)}_{1a\overline{2a}3a} = 14149,$$

determine el valor de a .

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Resolución

$$\overline{1a\overline{2a}3a} = x \quad x = \{(30 + a)[2] + a\} + a \quad x = 60 + 4a$$

$$(a+1)x^2 + (a+2)x + (a+3) = 14149$$

$$(a+1)x^2 + (a+2)x + (a+3) = 14149$$

$$16(a+1)[15+a]^2 + 4(a+2)(a+15) + (a+3) = 14149$$

$$a = \mathbf{2}$$

Problema 13

Se escogen 5 números consecutivos comprendidos entre 300 y 400, para luego convertirlos a la base 7, observándose que uno de ellos tiene una cifra más que todos los demás. Calcule la suma de cifras del menor de los cinco números, escrito en base 10.

A) 10

B) 12

C) 14

D) 15

E) 16

Resolución

$$7^3 = 343$$

$$339, 340, 341, 342, 343$$

$$N = 339 \rightarrow \text{Suma de cifras} = 15$$

Problema 14

Rebeca tiene tres hijos cuyas edades son a , b y c años. Si $b+c=7$, además $\overline{aabc}_6 = \overline{bb(2c)}_7$, calcule el valor de $a + b - c$.

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

Resolución

$$216a + 36a + 6b + c = 49b + 7b + 2c$$

$$252a + 6(7 - c) + c = 56(7 - c) + 2c$$

$$252a + 49c = 350 \rightarrow a = 1 \rightarrow c = 2 \rightarrow b = 5$$

$$a + b - c = 4$$

Problema 15

Determine la cantidad de números impares de tres cifras que existen en los sistemas de numeración de base siete y once.

A) 78

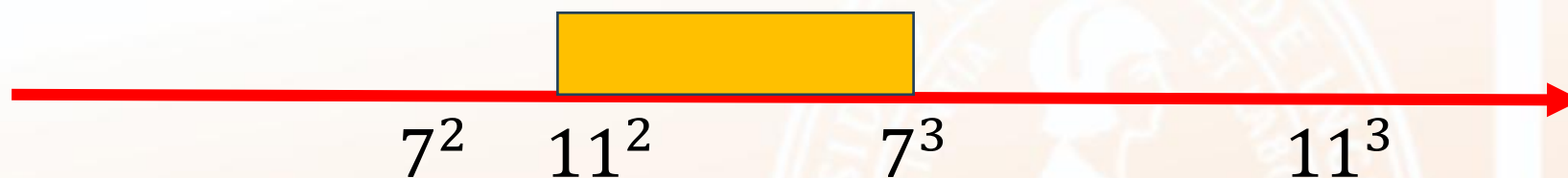
B) 111

C) 222

D) 343

E) 363

Resolución



$$N = 121, 123, 125, \dots, 341$$

$$\text{cant de números} = \frac{341 - 121}{2} + 1 = 111$$

Problema 16

El mayor número de 60 cifras del sistema octinario es convertido a otro sistema de numeración de base N obteniéndose también un mayor número. Determine la cantidad de valores que puede tomar N .

- A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Resolución

$$N = 8^{60} - 1 = 2^{180} - 1 = [2^n]^{\frac{180}{n}} - 1$$

por cada valor de n , hay una base que cumple

$$n, \text{ es divisor de } 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$\# \text{ divisores} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

*habrán otras **17** bases*

Problema 18

¿Cuántos números de la forma $\overline{abc(a+b+c)}_6$ existen?

A) 35

B) 36

C) 45

D) 60

E) 65

Resolución

Si $a + b + c = 1$:

1 caso

Si $a + b + c = 2$:

$$PR_{1,2}^3 = 3$$

Si $a + b + c = 3$:

$$PR_{2,2}^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Si $a + b + c = 4$:

$$PR_{3,2}^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Si $a + b + c = 5$:

$$PR_{4,2}^6 = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35 \text{ números}$$

Problema 19

¿Cuántos números de tres cifras en el sistema heptanario tienen por lo menos una cifra 2 en su escritura?

- A) 180 B) 175 C) 125
D) 120 E) 114

Resolución

$$N = \overline{abc}_{(7)}$$

Si $a = 2$:

$$7 \times 7 = 49 \text{ casos}$$

Si $b = 2$:

$$6 \times 7 = 42 \text{ casos}$$

Si $c = 2$:

$$6 \times 7 = 42 \text{ casos}$$

Si $a = 2$ y $b = 2$:

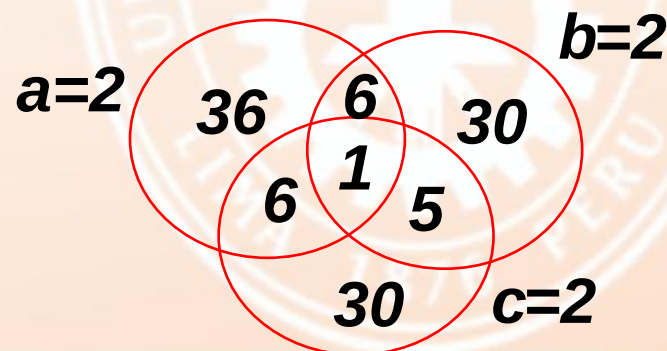
7 casos

Si $a = 2$ y $c = 2$:

7 casos

Si $b = 2$ y $c = 2$:

6 casos



114 casos

Problema 20

Con todas las cifras del número $(4n) \left(\frac{n}{2}\right) (n+4)$ se forman otros números de tres cifras y la suma de estos es P en base n^3 y dé como respuesta la suma de cifras.

- A) 11 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

Resolución

$$4n < 10 \quad \wedge \quad \frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$$
$$n = 2$$

$$N = 816$$

$$P = 168 + 186 + 618 + 681 + 861 = 2514$$

$$P = 4722_{(8)}$$

$$\text{Suma de cifras} = 13$$

Problema 21

Si en $1_n; 2_n; \dots; 140_n$ se han empleado 218 cifras (sin contar la base), entonces 157_n es

- A) 120 B) 118 C) 114
D) 112 E) 111

Resolución

$$[140_{(n)} + 1]3 - 111_{(n)} = 218$$

$$[n^2 + 4n + 1]3 - n^2 - n - 1 = 218$$

$$2n^2 + 11n = 216$$

$$n = 8$$

$$[157_{(n)}] = 157_{(8)} = \mathbf{111}$$

Problema 22

La diferencia de la cantidad de cifras que se utilizan para numerar las páginas de un libro en base cuatro y en base ocho es 227. Si en el sistema cuaternario, la última página del libro tiene 4 cifras, determine el número de páginas del libro.

- A) 215 B) 225 C) 230 D) 270 E) 277

Resolución

$$n = \overline{abcd}_4, \quad 4^3 \leq n < 4^4 \quad 100_8 \leq n < 400_8$$

n , es de 3 cifras en base 8

$$[n + 1]_4 - 1111_4 - [n + 1]_3 + 111_8 = 227$$

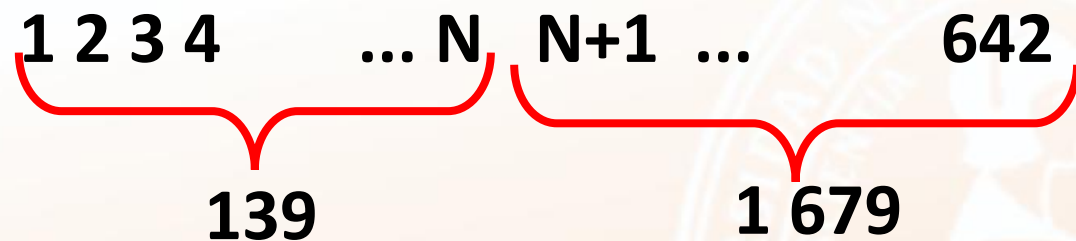
$$n + 4 - 85 - 3 + 73 = 227 \rightarrow n = \mathbf{238}$$

Problema 23

De un libro de 321 hojas se arrancaron cierto número de hojas del principio, observándose que en las páginas restantes se emplearon 1679 tipos de imprenta. Calcule el número de hojas que se arrancaron.

- A) 37 B) 39 C) 45 D) 48 E) 74

Resolución



$$total = [642 + 1]3 - 111 = 1\,818$$

$$[N + 1]2 - 11 = 139 \rightarrow N = 74$$

$$\# \text{ hojas arrancadas} = \mathbf{37}$$

Problema 24

Determine la máxima cantidad de términos que tiene la siguiente progresión aritmética: $112(3) ; 113(4) ; 112(5) ; \dots ; abc$, considere que $a \neq b \neq c$ además $a + b + c = 23$.

Dé como respuesta la suma de cifras.

A) 9

B) 10

C) 11

D) 12

E) 13

Resolución

$$R = 113_4 - 112_3 = 23 - 14 = 9$$

$$\overline{abc} = 14 + [n - 1]9$$

$$\overline{abc} = 9n + 5$$

$$n \leq 110$$

$$\overline{abc} = 986 = 109 \times 9 + 5$$

$$n = 109, \text{ suma de cifras} = \mathbf{10}$$

Problema 25

En la siguiente progresión aritmética:

$\overline{ab}; 17; \overline{cb}; \dots; \overline{acb}$, la suma de sus términos es

A) 1541

B) 1551

C) 1668

D) 1789

E) 1968

Resolución:

Por ser una P.A:

$$17 - \overline{ab} = \overline{cb} - 17$$

$$\overline{cb} + \overline{ab} = 34$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow \downarrow & \downarrow \\ 22 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \overline{acb} = 122$$

$$\Rightarrow r = 5$$

Luego:

Número de términos: $\frac{122 - 7}{5} = 23$

Suma de términos: $\left(\frac{12 + 122}{2} \right) \cdot 23 = 1541$

Problema 26

Si $0, \overline{\left(\frac{15}{x}\right) x(x^2 + 1)}_{(14)} = d, \overline{abc}_{(7)}$, determine cómo se representa $\frac{a}{bc}$ en el sistema senario.

- A) $0,012_{(6)}$ B) $0,0\widehat{1}2_{(6)}$ C) $0,014_{(6)}$ **D) $0,0\widehat{1}4_{(6)}$** E) $0,00\widehat{1}2_{(6)}$

Resolución

$$0, \overline{\left(\frac{15}{x}\right) x(x^2 + 1)}_{(14)} = 0,53(10)_{14} = \frac{53(10)_{14}}{1000_{14}}$$

↓
3

$$= \frac{129}{343} = \frac{243_7}{1000_7}$$

$$d, \overline{abc}_{(7)} = 0,243_7$$

Entonces:

$$a=2, b=4, c=3$$

Luego:

$$\frac{a}{bc} = \frac{2}{43} = \frac{10}{6^3 - 1}$$

$$= \frac{14_6}{100(-1)_6}$$

$$= \frac{14_6}{555_6} = 0,0\widehat{1}4_6$$

Problema 27

Expresa M en el sistema senario, siendo

$$M = 5 \times 7^4 + 3 \times 7^2 + 4 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

y dé como respuesta la suma de cifras de la parte no entera.

A) 1

B) 4

C) 6

D) 7

E) 8

Resolución

$$M = 5 \times 7^4 + 3 \times 7^2 + 3 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{7}{6}$$

$$M = 5 \times 7^4 + 3 \times 7^2 + 4 + \frac{1}{6}$$

$$132140_6 + \frac{1}{6} = 132140,1_6$$

Problema 28

Si $\frac{1}{5} = 0,171717 \dots_{(n)}$; entonces $\frac{n-1}{n+1}$ en base cinco es:

A) $0,2_5$

B) $0,3_5$

C) $0,4_5$

D) $0,12_5$

E) $0,24_5$

Resolución

$$\frac{1}{5} = \frac{17_n}{(n-1)(n-1)_n} = \frac{n+7}{n^2-1} \Rightarrow n=9 \rightarrow \frac{n-1}{n+1} = 0,8$$

0	8	$\times 5$
4	0	$\times 5$

$$0,8 = 0,4_5$$

Problema 29

Si $S = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^8} + \dots$,

Expresado en base 27 es

A) $0, \widehat{26}$

B) $0, \widehat{35}$

C) $0, \widehat{3A}$

D) $0, \widehat{3B}$

E) $0, \widehat{3C}$

Resolución

$$S = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{3^{14}} \dots$$

$$= \frac{3}{3^3} + \frac{9}{3^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{3}{3^9} + \frac{9}{3^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{3}{3^{15}} \dots$$

$$= \frac{3}{3^3} + \frac{10}{3^6} + \frac{3}{3^9} + \frac{10}{3^{12}} + \frac{3}{3^{15}} \dots = \frac{3}{27} + \frac{10}{27^2} + \frac{3}{27^3} + \frac{10}{27^4} + \frac{3}{27^5} \dots$$

$$S = 0, \widehat{3A}$$

Problema 30

Si $0, \hat{a}_7 = 0, \widehat{b0}_a$, calcule el valor de $a - b$.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Resolución

$$\frac{a}{7} = \frac{\overline{b0}_a}{(a-1)(a-1)_a} = \frac{ab}{a^2-1} \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{b}{a^2-1}$$

$$(a+1)(a-1) = 7b; \text{ como } b < a$$

$$a = 6 \quad \wedge \quad b = 5$$

$$\Rightarrow a - b = 1$$